O jednoj pogodnoj metodi za optimizaciju zavarenog sklopa

BRANKO B. PEJOVIĆ, Univerzitet u Istočnom Sarajevu,
Tehnološki fakultet, Zvornik, Bosna i Hercegovina
MITAR D. PERUŠIĆ, Univerzitet u Istočnom Sarajevu
Tehnološki fakultet, Zvornik, Bosna i Hercegovina
MLADEN S. IGNjATOVIĆ, Univerzitet u Istočnom Sarajevu,
Tehnološki fakultet, Zvornik, Bosna i Hercegovina
VLADAN M. MIĆIĆ, Univerzitet u Istočnom Sarajevu,
Tehnološki fakultet, Zvornik, Bosna i Hercegovina
STEFAN M. PAVLOVIĆ, Univerzitet u Istočnom Sarajevu
Tehnološki fakultet, Zvornik, Bosna i Hercegovina

Originalni naučni rad
UDC: 620.179.12
DOI: 10.5937/tehnika1606838P

U radu je, na primeru jednog karakterističnog opterećenog zavarenog sklopa, izvršena optimizacije njegovih dimenzija sa aspekta troškova zavarivanja. Pri ovome, u prvoj fazi definisane su promenljive i nepromenljive veličine i postavljen matematički oblik funkcije optimizacije. U sledećoj etapi procedure, definisan je i postavljen sistem najvažnijih funkcija ograničenja koji se pri projektovanju konstrukcije moraju uzeti u obzir i tehnolog i konstruktor. Na taj način, dobijen je matematički model optimizacije posmatranog problema za čije je efikasno rešavanje predložen metod geometrijskog programiranja.

U nastavku, polazeći od matematičke osnove, detaljno je razrađen algoritam optimizacije predložene metode pri čemu su postavljene glavne jednačine problema, a koje važe uz određene uslove. Na taj način, optimizacioni ili primarni zadatak sveo se na dualni zadatak preko odgovarajuće funkcije, koji se znatno lakše rešava u odnosu na primarni zadatak optimizacije funkcije cilja. Glavni razlog za ovo je dobijeni sistem linearnih jednačina. Pri ovome iskorištena je korelacija između optimalnog primarnog vektora koji minimizira funkciju cilja i dualnog vektora koji maksimizira dualnu funkciju.

Metoda je ilustrovana na jednom računskom praktičnom primeru sa različitim brojem funkcija ograničenja. Pokazano je da se za slučaj manjeg stepena složenosti, do rešenja može doći maksimizacijom odgovarajuće dualne funkcije, primenom matematičke analize odnosno diferencijalnog računa.

Ključne reči: *zavarene opterećene konstrukcije, matematički model optimizacije, funkcija troškova, funkcija ograničenja, geometrijsko programiranje, pozitivni polinomi, dualna funkcija*

1. UVODNA RAZMATRANJA

Teorija optimizacije predstavlja naučnu disciplinu koja proučava metode optimizacije raznovrsnih objekata u nauci i tehnici. Pod pojmom optimizacije podrazumjeva se u najopštijem slučaju metodologija definisanja najpovoljnijeg rezultata ili rešenja za određene uslove. Određeniju i potpuniju definiciju optimizacije daju osnovni pojmovi: cilj optimizacije, objekat optimizacije i metod optimizacije, [1-3].

Cilj optimizacije se iskazuje preko kriterijuma optimizacije (funkcije optimizacije ili funkcije cilja), a metodom optimizacije se ostvaruje postavljeni cilj optimizacije na objektu optimizacije. U mašinskoj tehnici kao objekat optimizacije može biti: neki proces, neki tehnički sistem, inženjerska delatnost itd. Primena teorije optimizacije je zastupljena u mnogim tehničkim naukama i inženjerskim delatnostima kao što su na primer, [4, 5, 9, 13]:

- projektovanje sistema i njihovih strukturnih komponenata
- programiranje i analiza funkcionisanja sistema
- optimalno upravljanje proizvodnim tehnikama i tehnologijama

Adresa autora: Branko Pejović, Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Tehnološki fakultet Zvornik, Zvornik, Karakaj bb, Bosna i Hercegovina

Rad primljen: 22.07.2014.
Rad prihvaćen: 10.10.2016.

- inženjerske analize i obrada informacija.

2. MATEMATIČKI MODEL OPTIMIZACIJE

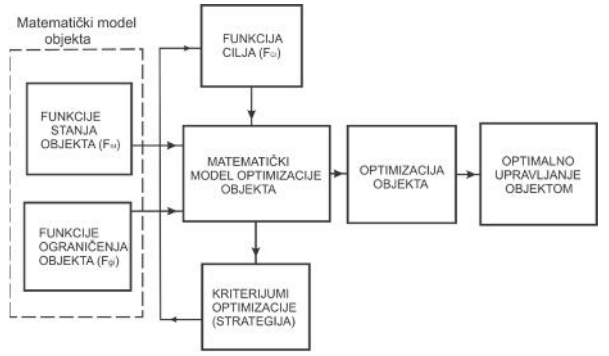
Matematičku osnovu tehnoekonomske optimizacije objekta predstavlja matematički model optimizacije.

Model optimizacije prema slici 1 čine komponente, [2, 13, 14]:

funkcija stanja F_{si} (i=1,2,3...)

funkcija ograničenja (funkcija graničnih uslova) F_{gi}(i=1,2,3...)

kriterijum optimizacije i funkcija cilja F_{ci} (i=1,2,3...

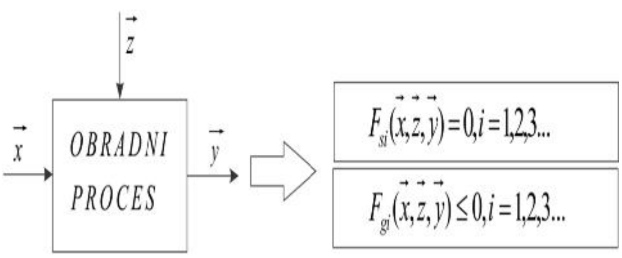


Slika 1 - Struktura matematičkog modela optimizacije objekta

Prvim dvema komponentama, tj. funkcijama stanja ili jednačinama stanja i funkcijama ograničenja objekta definiše se matematički model objekta. Pod realnim objektima podrazumevaju se raznovrsne pojave, procesi i sistemi.

Kao veoma česti objekti modeliranja u mašinskoj tehnici su obradni i tehnološki procesi, [4, 15]. Treba naglasiti da matematički model, za razliku od fizičkog koji zadržava fizičku prirodu originala (realnog objekta), prikazuje se matematičkom apstrakcijom.

Ovaj apstraktni oblik iskazuje suštinske fizičke, geometrijske, tehnološke, ekonomske ili bilo koje druge karakteristike realnog objekta, [23, 24]. Matematički model nekog obradnog procesa može se u opštem slučaju prikazati šematski prema slici 2.



Slika 2 - Matematički model obradnog procesa

Pri ovome, neophodno je izvršiti analizu ulaza i izlaza „elementarnih“ procesa i svih skupova ulazno-izlaznih veličina x_i , y_i , z_i *i=1,2,3...* za svaki dekomponovani „elementarni“ proces. Ovde „elementarni“ procesi predstavljaju suštinu obradnog procesa i oni treba da se opišu matematičkim modelom procesa, [1, 3, 9].

Nakon analize postojećih ograničenja pristupa se matematičkom opisivanju objekta na matematičkom jeziku u vidu određenog skupa funkcija i jednačina. Prema tome glavne funkcije u matematičkom modelu su funkcija stanja F_{si} i funkcija ograničenja $F_{gi.}$

Uzimajući u obzir šemu na slici 2, može se postaviti matematički model bilo kog obradnog procesa u proizvodnom mašinstvu (sa i bez skidanja strugotine, a i šire), preko funkcije stanja procesa:

$$F_{si} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = 0 \quad i = 1,2,3... \quad (1)$$

i funkcija ograničenja

$$F_{gi} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \le 0 \quad i = 1,2,3... \quad (2)$$

Matematičkim modelom (1) i (2) iskazuju se suštinske fizičke, geometrijske, tehnološke kvalimetrijske i ekonomske zavisnosti unutar obradnog procesa i to u dopuštenom domenu D promena veličina $\vec{x}$. U sistemu (1)-(2) vektori $\vec{x}, \vec{y}$ i $\vec{z}$ označavaju skup promenljivih ulazno-izlaznih veličina procesa. Vektorom karakteristika stanja procesa ili upravljanih veličina $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3,...y_n)$, opisuje se stanje i ponašanje obradnog procesa i sistema nastalo kao posledica dejstva ulaznih veličina $\vec{x}$ i $\vec{z}$.

Ulazne veličine, kojih ima mnogo, dele se na kontrolisane ($\vec{x}$) i nekontrolisane ($\vec{z}$) veličine procesa. U vektor $\vec{x}$ ubrajaju se svi ulazi u proces čije se vrednosti mogu izmeriti i numerički odrediti.

Vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3,...x_p)$ može se raščlaniti na grupu optimirajućih ili upravljačkih veličina i grupa koje su konstantne u toku odvijanja procesa. Prva grupa, može se menjati u procesu kako bi se ostvarilo željeno stanje u toku procesa ($\vec{y}$) odnosno optimum funkcije cilja (F_c).Vektor nekontrolisanih veličina $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3,...)$ sadrži one ulazne veličine čije se vrednosti ne mogu meriti kao i one koje je moguće izmeriti ali čiji je uticaj na proces zanemarljivo mali.

Vektor $\vec{z}$ izaziva neželjena stanja i neželjeni tok promene karakteristike procesa ($\vec{y}$) ili funkcije cilja (F_c). Za slučaj determinističkog procesa uticaj nekontrolisanih faktora $\vec{z}$ nije veliki, postoji zavisnost između karakteristika stanja $\vec{y}$ i ulaznih veličina $\vec{x}$. Za ovaj model, veličine $\vec{z}$ neće biti sadržane u relacijama (1) i (2), pa se dobija da je:

$$F_{si} = (\vec{x}, \vec{y}) = 0 \quad i = 1,2,3... \quad (3)$$

$$F_{gi} = (\vec{x}, \vec{y}) \leq 0 \quad i = 1,2,3... \tag{4}$$

ili u eksplicitnom obliku

$$\vec{y} = F(\vec{x}) \tag{5}$$

Komponentama funkcija stanja i funkcija ograničenja, kao što je rečeno, definiše se matematički model dok se kriterijumom optimizacije kao trećom komponentom, zajedno sa prvim dvema, postavlja okvirni matematički model optimizacije. Na osnovu ove tri komponente, postavlja se konkretni oblik funkcije cilja (funkcije optimizacije):

$$F_c = F_c(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \tag{6}$$

Funkcija (6) predstavlja matematički opis optimalnog upravljanja procesom, identifikovanog kriterijumom optimizacije.

U teoriji tehnoekonomske optimizacije može se izdvojiti više kriterijuma optimizacije odnosno funkcija cilja (F_c) prema kojima se optimiziraju procesi, [11, 13, 15, 25]:

- troškovi (T_i)
- vreme izrade (t_{ui})
- ekonomičnost (E_i)
- proizvodnost (P_i)
- rentabilnost (R_i)
- kvalitet (K_i)

Dovođenjem kriterijuma optimizacije

$$F_{ci} = (T_i, t_{ui}, E_i, P_i, R_i, K_i...) \tag{7}$$

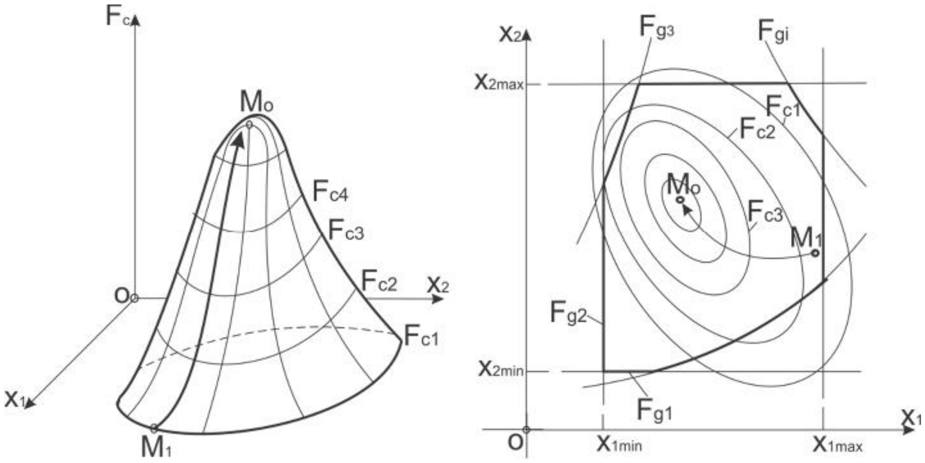
kojima se iskazuju ključni proizvodni efekti, a takođe i funkcije ograničenja F_{gi}, kojima se ograničava dopušteni domen D promene ulaznih veličina $\vec{x}$, u funkcionalnu vezu sa skupom ulaznih i drugih navedenih veličina, prema relacijama (6) i (2), dobija se matematički model optimizacije determinističkog procesa:

$$F_c = F_c(x_1, x_2, x_3, ...x_p)$$

$$x \in D$$

$$D \begin{cases} x_i = c_i \\ a_r \leq x_i \leq b_r \\ F_{gj}(x_1, x_2, x_3, ...x_D) \leq 0 \end{cases} \tag{8}$$

Tehnoekonomska optimizacija svodi se sa matematičkog aspekta, na definisanju ekstremuma (optimuma) funkcije cilja (8) i korespondentnih vrednosti upravljajućih veličina i karakteristika stanja procesa koje obezbeđuje ovaj optimum, što je prikazano na slici 3, [4, 23, 26].



Slika 3 - Dijagram površine funkcije optimizacije sa optimiranim područjem

Optimalni nivo ili rešenje $\vec{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30}, ...x_{k0})$ funkcija cilja (8) naziva se lokalnim ekstremumom a tačka M_0 (određena vektorom $\vec{x}_0$) tačka lokalnog ekstremuma. Funkcija F_c može imati više lokalnih ekstremuma.

Da bi se formirao matematički model optimizacije prema relaciji (8), pored matematičkog izraza funkcija cilja F_c, potrebno je da se postave i matematički izrazi svih potrebnih funkcija ograničenja F_{gi}, $i = 1,2,3,...$ Na ovaj način, definiše se i granica dopuštenog ili optimiziranog područja, oblast ili domen D. Sva ova ograničenja mogu se izraziti u vidu jednačina i nejednačina u kojima se nalaze, pored drugih datih veličina i skupova ulaznih veličina x_i, [11, 12].

Prema izloženom, može se zaključiti, da matematički model optimizacije, bez obzira o kakvom je objektu reč (procesu, sistemu, konstrukciji, upravljanju itd.), mora uvek da sadrži, kao u slučaju obradnih procesa, četiri osnovne komponente:

- funkcije stanja objekta
- funkcije ograničenja
- kriterijum optimizacije
- funkciju optimizacije ili funkciju cilja

Na osnovu ovih komponenti, formira se konačni oblik modela optimizaciji datog objekta koji se izražava funkcijom optimizacije $F_c = F_c(x_i)$ i dopuštenim domenom D promene nezavisno promjenljivih x_i.

2. METOD GEOMETRIJSKOG PROGRAMIRANJA

Ovom metodom se rešavaju oni zadaci optimizacije čije funkcije optimizacije imaju oblik pozitivnih polinoma:

$$F_c(x) = \sum_{j=1}^{k} B_j \sum_{i=1}^{k} x_i^{b_{ij}} \tag{9}$$

gde su: B_j-pozitivni koeficijenti (konstante), b_{ij}-eksponenti, proizvoljni brojevi, koji mogu imati pozitivne, negativne ili nula vrijednosti, x_i-nezavisno promjenljive (varijabla) koje mogu imati samo pozitivne vrednosti.

Algoritam metoda, koja će se ukratko izložiti u narednom tekstu, dopušta da se utvrdi optimalno rešenje $\vec{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30}, ...x_{k0})$ za koje se postiže $F_{c\,\min}$, [6, 7, 8, 10].

U mnogim slučajevima optimizacije obradnih i tehnoloških procesa sa aspekta troškova, gde se funkcija optimizacije izražava u obliku pozitivnog polinoma (9), moguća je efikasna primena metoda geometrijskog programiranja.

2.1 Osnovna nejednačina metode

Pri razvoju algoritma metoda geometrijskog programiranja, polazi se od matematičke nejednakosti između geometrijske i aritmetičke sredine nenegativnih brojeva. Ta nejednačina predstavlja temelj metode i za dva broja Z_1 i Z_2 glasi, [10, 12, 14, 23, 24].

$$\frac{1}{2}(Z_1 + Z_2) \geq \sqrt{Z_1 Z_2} \tag{10}$$

Ova jednačina izražava stav da geometrijska ne može biti veća od aritmetičke sredine.

Nejednačina (10), za *k* varijabli glasi:

$$\sum_{j=1}^{r} q_j Z_j > \prod_{j=1}^{r} Z_j^{q_j} \tag{11}$$

i važi pod uslovom da su veličine Z_j pozitivne i da pozitivne veličine q_j zadovoljavaju uslov normalnosti

$$\sum_{j=1}^{r} q_j = 1 \tag{12}$$

Iz jednačine (11) sledi osnovna jednačina metoda geometrijskog programiranja:

$$\sum_{j=1}^{r} z_j \geq \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{z_j}{q_j} \right)^{q_j} \tag{13}$$

Prethodna jednačina se dobija kada se u nejednačini izvrši zamena

$$z_j = q_j Z_j \tag{14}$$

pri čemu je $z_j > 0$

Nejednačina (14) ima fundamentalno značenje za metod geometrijskog programiranja zato što se primenom ove nejednačine na funkciju optimizacije (9) može, nakon smene:

$$z_j(x) = B_j \prod_{i=1}^{k} x_i^{b_{ij}} \tag{15}$$

u jednačinu (13), napisati matematička osnova metode

$$\sum_{j=1}^{r} B_j \prod_{i=1}^{k} x_i^{b_{ij}} \geq \prod_{j=1}^{r} \left(\frac{B_j}{q_j} \right)^{q_j} \prod_{i=1}^{k} x_i^{L_i} \tag{16}$$

pri čemu je

$$L_i = \sum_{j=1}^{r} q_j b_{ij} \tag{17}$$

Naglašeno je da nejednačina (16) važi za bilo koje pozitivne vrednosti veličine q_j, koje moraju zadovoljiti uslov normalnosti (12). Polazeći od ovoga, može se pojednostaviti nejednačina (16) izborom vrednosti veličina q_j tako da se dobije L_i=0 u jednačini (17), tj.

$$L_i = \sum_{j=1}^{r} q_j b_{ij} = 0 \quad i = \overline{1,k} \tag{18}$$

Jednačina (18) uprošćena, fundamentalni izraz (16) koji sada glasi:

$$\sum_{j=1}^{r} B_j \prod_{i=1}^{k} x_i^{b_{ij}} \geq \prod_{j=1}^{r} \left(\frac{B_j}{q_j} \right)^{q_j} \tag{19}$$

Ovaj izraz važi uz uslov normalnosti:

$$\sum_{j=1}^{r} q_j = 1 \tag{20}$$

uslov ortogonalnosti, saglasno sa jednačinom (17) tj. L_i=0

$$\sum_{j=1}^{r} q_j b_{ij} = 0 \quad i = \overline{1,k} \tag{21}$$

i uslov pozitivnosti:

$$q_j > 0 \quad i = \overline{1, r} \tag{22}$$

Desna strana nejednačine (19) funkcija je, kao što se vidi, veličina q_j($i = \overline{1, r}$), tj.

$$Q(q) = \prod_{j=1}^{r} \left(\frac{B_j}{q_j} \right)^{q_j} \tag{23}$$

i naziva se dualna funkcija konveksne funkcije (9), jer je pozitivan polinom (9) konveksna funkcija.

Leva strana F_c nejednačine (19) zavisi međutim samo od nezavisnih promjenljivih veličina x_j($i = \overline{1, r}$).

Odavde sledi zaključak: na osnovu fundamentalne nejednačine (19), pozitivni polinom F_c (9) ne može, ni pri kakvim vrednostima promenljive x_j($i = \overline{1, r}$), biti manji od dualne funkcije Q(q), (23), pa se primarni model, tj. minimizacija funkcije F_c, svodi na dualni model tj. na maksimizaciju dualne funkcije Q(q). Znači preformuliše li se primarni (osnovni, polazni) zaključak optimizacije u dualni zadatak, budući da se može dokazati [6, 7, 8], da je maksimalna vrednost dualne funkcije Q(q) jednaka minimalnoj vrednosti osnovne funkcije u obliku pozitivnog polinoma F_c, tj.

$$\min F_c(x) = \max \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{B_j}{q_j} \right)^{q_j} \tag{24}$$

Pri ovome moraju biti zadovoljeni uslovi (20), (21) i (22) za dualne promenljive Q_j($i = \overline{1, k}$). Znači optimizacioni (primarni) zadatak

$$F_{c\min} = \min \sum_{j=1}^{r} B_j \prod_{i=1}^{k} x_i^{b_{ij}} = F_{c0} \tag{24a}$$

$$x_i > 0$$

$$Q(q)_{\max} = \max \prod_{j=1}^{r} \left(\frac{B_j}{q_j} \right)^{q_j} = Q_0 \tag{25}$$

$$\sum_{j=1}^{r} q_j = 1$$

$$\sum_{j=1}^{r} q_j b_{ij} = 0 \qquad i = \overline{1, k}$$

$$q_j > 0 \quad i = \overline{1, r} \tag{25a}$$

koje se znatno lakše rešava u odnosu na primarni zadatak (25) tj. određivanje $F_{c,\min}$, optimizacije funkcije F_c.

2.2 Algoritam metode

Pri ovome moguća su dva slučaja i to:

- slučaj bez ograničenja
- slučaj sa ograničenjima

Za slučaj da ne postoje ograničenja jednačinom (24) odnosno sistemom (25) definisana je minimalna vrednost (optimum) funkcije optimizacije F_{c0} (9) preko maksimuma Q_0, tj. određivanje optimalnog nivoa F_{c0} pozitivnog polinoma F_c, svedemo je na određivanje maksimalne vrednosti Q_0 dualne funkcije Q(q). To bi bio prvi korak metode.

U drugom koraku izračunava se optimalni dualni vektor $\vec{q}_0 = (q_{10}, q_{20}, q_{30}, \ldots q_{k0})$ iz sistema jednačina:

$$\sum_{j=1}^{r} q_j = 1$$

$$\sum_{j=1}^{r} q_j b_{ij} = 0 \qquad i = \overline{1, k} \tag{26}$$

koje predstavljaju uslove normalnosti i ortogonalnosti.

U trećem koraku određuje se maksimalna vrednost Q_0 dualne funkcije Q(q), koja na bazi poznatog skupa $\vec{q}_0$ (određene u drugom koraku), izračunate iz jednačine:

$$Q_0 = \max \prod_{j=1}^{r} \left(\frac{B_j}{q_{j0}} \right)^{q_{j0}} \tag{27}$$

Četvrti korak obuhvata određivanje optimalnog primarnog vektora (rešenje) $\vec{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30}, \ldots x_{k0})$

Funkcije F_c, (9) na osnovu nađene vrednosti Q_0=F_{c0} u trećem koraku. Između $\vec{x}_0$, koji minimizira funkciju F_c=F_0, optimalnog dualnog vektora $\vec{q}_0$ koji zadovoljava uslove normalnosti i ortogonalnosti (26), drugi korak, postaje sledeća relacija:

$$Q_0 q_0 = B_j \prod_{i=1}^{k} x_{i0} b_{ij} \qquad i = \overline{1, r} \tag{28}$$

Iz jednačine (28) dobija se traženi optimalni nivo $\vec{x}_0$, pri čemu su veličine Q_0=F_{c0} odnosno q_{j0}($i = \overline{1, r}$) poznate, određene u drugom odnosno trećem koraku.

Za slučaj da su data ograničenja u obliku funkcija:

$$F_{g1} \le 1,\ F_{g2} \le 1,\ F_{g3} \le 1, \ldots,\ F_{gp} \le 1 \tag{29}$$

tada primarni zadatak glasi

$$F_{c\min} = \min \sum_{j=1}^{r} F_j \prod_{i=1}^{k} x_i^{b_{ij}} \tag{30}$$

$$F_{g1} \le 1,\ F_{g2} \le 1,\ F_{g3} \le 1,\ \dots,\ F_{gp} \le 1$$

$$x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0, \dots,\ x_k > 0 \tag{31}$$

pri čemu funkcije ograničenja $F_{gt}(t = \overline{1, p})$ imaju oblik pozitivnog polinoma

$$F_{gt} = \min \sum_{j \in J(t)} B_j \prod_{i=1}^{k} x_i^{b_{ij}} \quad t = 1,2,3,\dots, p \tag{32}$$

gde su:

J(0) (1,...,m_0) – indeksi pojedinih članova funkcije F_c

J(1) (m_0+1,...,m_1) – indeksi pojedinih članova funkcije F_{g1}

J(2) (m_1+1,...,m_2) – indeksi pojedinih članova funkcije F_{g2}

J(p) (m_{p-1}+1,...,m_p=r) – indeksi pojedinih članova funkcije F_{gp}

Ovde su funkcije F_c i F_{gp} u obliku pozitivnog polinoma.

Odgovarajući dualni zadatak, na koji se svodi primarni zadatak, može se prikazati i izraziti sistemom:

$$Q(q)_{\max} = \max \left[\prod_{j=1}^{r} \left(\frac{B_j}{q_j} \right)^{q_j} \right] \prod_{t=1}^{p} \alpha_t^{\alpha_t} \tag{33}$$

$$\alpha_t = \sum_{j \in J(t)} q_j \qquad t = 1,2,3,\dots, p \tag{34}$$

$$\sum_{j=1}^{r} q_j = 1$$

$$\sum_{j=1}^{r} q_j b_{ij} = 0 \qquad i = \overline{1, k} \tag{35}$$

$$q_j > 0 \quad i = \overline{1, r} \tag{36}$$

Kao što se iz (32) vidi, u jednačini (33) unose se svi koeficijenti B_j koji sadrže funkciju F_c i sistem funkcije ograničenja $F_{gt}(t = \overline{1, p})$. I ovde uslovi (35) i (36), predstavljaju uslove normalnosti, ortogonalnosti i pozitivnosti respektivno.

Dalji tok algoritma optimizacije datog objekta identičan je algoritmu metoda geometrijskog programiranja bez ograničenja. Međutim jednačine (28) za određivanje optimalnog primarnog vektora $\vec{x}_0$ u nekoliko je u ovom slučaju modifikovana i glasi:

$$B_j \prod_{i=1}^{k} x_i^{b_{ij}} = \begin{cases} Q_0 q_{j0} & za\ \ j \in J(0) \\ \dfrac{q_{j0}}{\alpha_{t0}} & za\ \ j \in J(t) \quad t = \overline{1, p} \end{cases} \tag{37}$$

gde je

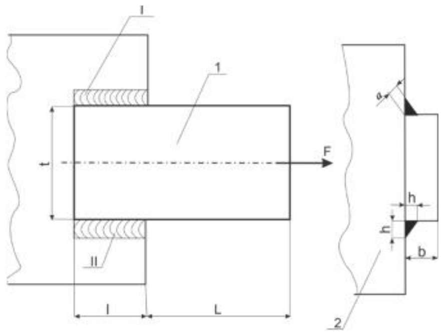
$$\alpha_{t0} = \sum_{j \in J(t)} q_{j0} \tag{38}$$

3. RAČUNSKI PRIMER

U primeru na slici 4, sklop se sastoji iz dva elementa: grede (nosača) 1 sa šavom i držačem (osloncem) 2, pri čemu se greda učvršćuje za kruti držač šavovima I i II.

a) Definisanje nepromenljivih i promenljivih veličina

Prema izloženoj proceduri, prvo se moraju definisati nepromjenljive i promjenljive veličine datog objekta. Uslovima zadatka date su stalne (nepromenljive) veličine: vrsta materijala grede, slobodna dužina grede (komada) L i maksimalna sila F kojom se opterećuje greda.



Slika 4 - Opterećeni zavareni sklop

Ostale dimenzije sklopa su nezavisno promenljive. To su dimenzije:

$$h = x_1 \qquad l = x_2$$

$$t = x_3 \qquad b = x_4 \tag{39}$$

Vrednost ovih dimenzija treba tako odrediti odnosno optimizirati da optimalni vektor $\vec{x}_0 = (x_{10} = h_0, x_{20} = l_0, x_{30} = t_0, x_0 = b_0)$ postigne minimalne troškove zavarivanja tj. $F_{cmin} = F_{co} = \min T$.

b) Definisanje matematičkog oblika funkcije optimizacije

Funkcija troškova kao funkcija optimizacije može se napisati kao, [16, 17, 18, 30, 31].

$$T = T_p + T_1 + T_2 \tag{40}$$

Ove funkcije čine tri osnovne komponente (parcijalni troškovi):

T_p – troškovi pripreme (pripremnih operacija)

T_1 – troškovi zavarivanja

T_2 – troškovi (cena) materijala

Troškovi pripreme T_p odnose se na svu potrebnu tehnološku opremu za obavljanje operacije zavarivanja: alat za zavarivanje, pomoćni pribor za postavljanje grede na nosač u poziciju, njeno stezanje i drugo. Ove troškove smatraćemo konstantnim (ne zavise od promenljivih x_1, x_2, x_3, i x_4).

Troškovi operacije zavarivanja T_1 mogu se odrediti ako se znaju elementi za ove troškove:

T_{11} – troškovi korišćenja aparata za zavarivanje izraženi u novčanom iznosu po jedinici vremena, a koji obuhvataju troškove amortizacije i otplatu kredita aparata, troškovi pomoćnog pribora (amortizacije) koji se koriste pri zavarivanju, troškovi ljudskog rada (lični dohoci sa doprinosima i drugo).

Q_z – kapacitet aparata tj. zapremina šava u jedinici vremena i

V_z – zapremina zavarenog spoja, zavari I i II, koja se za dati primer računa kao:

$$V_z = V_{z1} + V_{z2} = \frac{1}{2}h^2 l + \frac{1}{2}h^2 l = h^2 l \tag{41}$$

što sledi prema slici 4.

Na osnovu ovih elemenata mogu se napisati troškovi T_1:

$$T_1 = \frac{T_{11}}{Q_z} V_z = \frac{T_{11}}{Q_z} h^2 l \tag{42}$$

Troškovi materijala biće:

$$T_2 = T_3 V_z + T_4 V_G \tag{43}$$

gde su:

T_3 – cena materijala šava

T_4 – cena materijala grede

V_G – zapremina grede koja se računa kao:

$$V_G = t \cdot b \cdot (L + l) \tag{44}$$

zamenom (41) i (44) u (43) biće:

$$T_2 = T_3 \cdot h^2 l + T_4 \cdot t \cdot b \cdot (L + l) \tag{45}$$

Zamenom troškova prema (42) i (45) u (40) dobija se traženi oblik funkcije optimizacije (cilja):

$$\begin{aligned} F_c = T = T_p + \frac{T_{11}}{Q_z} \cdot h^2 l + T_3 \cdot h^2 l + \\ + T_4 \cdot t \cdot b \cdot (L + l) \end{aligned} \tag{46}$$

odnosno

$$T = T_p + \left(\frac{T_{11}}{Q_z} + T_3 \right) \cdot h^2 l + T_4 \cdot t \cdot b \cdot (L + l) \tag{47}$$

ili prema (39):

$$\begin{aligned} T = T_p + \left(\frac{T_{11}}{Q_z} + T_3 \right) \cdot x_1^{\,2} \cdot x_2 + T_4 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + \\ + T_4 \cdot L \cdot x_3 \cdot x_4 \end{aligned} \tag{48}$$

pri ovome su vrednosti koeficijenata T_{11}, Q, T_3, T_4 i L poznate odnosno date zadatkom (ciljem optimizacije).

c) Definisanje i postavljanje sistema funkcija ograničenja

1. Ograničenja vezana za napon na smicanje u šavu, [30, 31, 32].

Stvarni napon smicanja u šavu biće, s obzirom da je računska debljina šava $a = \frac{h\sqrt{2}}{2}$, slika 4.

$$\begin{aligned} \tau = \tau(x_i) = \frac{F}{2 \cdot A_z} = \frac{F}{2 \cdot a \cdot l} = \\ = \frac{F}{h\sqrt{2} \cdot l} = \frac{F}{\sqrt{2} \cdot x_1 \cdot x_2} \le \tau_d \end{aligned} \tag{49}$$

Za dopušteni napon na smicanje τ_d, važiće da je

$$\tau_d \ge \frac{F}{\sqrt{2} \cdot x_1 \cdot x_2} \qquad \tau_d \ge \tau(x_i) \tag{50}$$

Deljenjem jednačine (50) sa τ_d biće:

$$1 \ge \frac{F}{\tau_d \cdot \sqrt{2} \cdot x_1 \cdot x_2} \tag{51}$$

odnosno s obzirom na funkciju ograničenja biće:

$$F_{g1} = \frac{F}{\tau_d \cdot \sqrt{2}} x_1^{-1} \cdot x_2^{-1} \le 1 \tag{52}$$

Oblik funkcije F_{g1}, kao i drugih funkcija optimizacije u ovom obliku, kao što će se videti pogodan je za optimizaciju.

2. Ograničenja vezana za normalni napon istezanja materijala grede, [30, 31, 33].

Stvarni napon biće manji od dozvoljenog:

$$\pm(x_i) = \frac{F}{A} = \frac{F}{t \cdot b} \le \pm_d \tag{53}$$

odnosno

$$\frac{F}{t \cdot b \cdot \pm_d} \le 1 \tag{54}$$

s obzirom na funkciju ograničenja biće:

$$F_{g2} = \frac{F}{t \cdot b \cdot \pm_d} = \frac{F}{x_3 \cdot x_4 \cdot \pm_d} = \frac{F}{\pm_d} x_3^{-1} \cdot x_4^{-1} \le 1 \tag{55}$$

3. Ograničenje vezano za praktičnu mogućnost dobijanja šava

Ovo ograničenje, izražava se kao $b \ge h$, s obzirom da širina grede mora biti veća od parametra šava h. Odavde sledi da je:

$$x_4 \ge x_1 \qquad 1 \ge \frac{x_1}{x_4} \tag{56}$$

S obzirom na funkciju ograničenja biće:

$$F_{g3} = \frac{x_1}{x_4} \le 1$$

$$F_{g3} = x_1 \cdot x_4^{-1} \le 1 \tag{57}$$

4. Ograničenja vezana za nenegativnost promjenljivih veličina x_i.

Ovo ograničenje izražava se funkcijom:

$$F_{g4} = x_i \ge 0 \qquad i = 1,2,3,4 \tag{58}$$

d) Matematički model optimizacije

Prema izvedenim relacijama (48), (52), (55), (57), (58), za posmatranu konstrukciju, matematički model optimizacije biće:

$$F_c = T = \min\left[\left(\frac{T_{11}}{Q_z} + T_3\right) \cdot x_1^{\,2} \cdot x_2 + T_4 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + T_4 \cdot L \cdot x_3 \cdot x_4\right] \tag{59}$$

$$D\begin{cases} F_{g1} = \dfrac{F}{2_d \cdot \sqrt{2}} x_1^{-1} \cdot x_2^{-1} \le 1 \\ F_{g2} = \dfrac{F}{\pm_d} x_3^{-1} \cdot x_4^{-1} \le 1 \\ F_{g3} = x_1 \cdot x_4^{-1} \le 1 \\ F_{g4} = x_i \ge 0 \end{cases} \qquad i = 1,2,3,4 \tag{60}$$

U funkciji (59), troškovi pripreme T_p kao konstantni za posmatranu relaciju, nisu uzeti u obzir s obzirom da ne utiču na matematičku analizu koja sledi.

Kada se odredi minimalna funkcija F_c, na istu treba samo dodati vrednost troškova pripreme, s obzirom na relaciju (40).

Uvođenjem oznaka (konstanti):

$$T_{13} = \frac{T_{11}}{Q_z} + T_3 \qquad F_a = \frac{F}{\sqrt{2} \cdot 2_d}$$

$$T_{4L} = T_4 \cdot L \qquad F_b = \frac{F}{\pm_d} \tag{61}$$

relacije (59) i (60) se pojednostavljuju:

$$F_c = T = \min\left[T_{13} \cdot x_1^{\,2} \cdot x_2 + T_4 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + T_{4L} \cdot x_3 \cdot x_4\right]$$

$$F_{g1} = F_a \cdot x_1^{-1} \cdot x_2^{-1} \le 1$$

$$F_{g2} = F_b \cdot x_3^{-1} \cdot x_4^{-1} \le 1$$

$$F_{g3} = x_1 \cdot x_4^{-1} \le 1 \tag{62}$$

pri čemu je $x_1 \ge 0$; $x_2 \ge 0$; $x_3 \ge 0$; $x_4 \ge 0$

Prema izloženom algoritmu, poglavlje 2.2, za slučaj da postoje ograničenja, odgovarajuća dualna funkcija s obzirom na (62) biće:

$$Q(q) = \left(\frac{T_{13}}{q_1}\right)^{q_1} \cdot \left(\frac{T_4}{q_2}\right)^{q_2} \cdot \left(\frac{T_{4L}}{q_3}\right)^{q_3} \cdot \left(\frac{F_a}{q_4}\right)^{q_4} \cdot \left(\frac{F_b}{q_5}\right)^{q_5} \cdot \left(\frac{1}{q_6}\right)^{q_6} \cdot q_4^{q_4} \cdot q_5^{q_5} \cdot q_6^{q_6} \tag{63}$$

pošto u zadatku ima ukupno šest članova: r=6, tri u F_c i tri u F_g, s obzirom da postoje tri funkcije ograničenja (t=1) od kojih svaka ima po jedan član.

Iz uslova normalnosti (35) i (36) ortogonalnosti dobijamo sistem od pet jednačina sa šest nepoznatih:

$$\begin{aligned} &(I) \quad q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ &(II) \quad 2q_1 - q_4 + q_6 = 0 \\ &(III) \quad q_1 + q_2 - q_4 = 0 \\ &(IV) \quad q_2 + q_3 - q_5 = 0 \\ &(V) \quad q_2 + q_3 - q_5 - q_6 = 0 \end{aligned} \tag{64}$$

Očigledno I jednačina predstavlja uslov normalnosti (funkcija F_c ima tri člana, pa se zbog toga pojavljuje q_1, q_2, q_3), dok ostale jednačine (II-V) predstavljaju uslov ortogonalnosti, redom prema promjenljivim x_1, x_2, x_3 *i* x_4.

Pri ovome jednačina (II) određuje se prema x_1, jednačina (III) prema x_2, jednačina (IV) prema x_3, a jednačina (V) prema x_4, uzimajući u obzir njihove eksponente. Ukupan broj q_i $(i=1\text{-}6)$ jednak je broju članova funkcije F_c i funkcija ograničenja (3+1+1+1=6).

Oduzimanjem V jednačine od IV, sledi da je:

$$q_6 = 0 \tag{65}$$

Korišćenjem Gausovog algoritma, na jednostavan način se pokazuje da se sve nepoznate mogu izraziti preko q_1.

Iz II jednačine sledi da je:

$$q_4 = 2q_1 \tag{66}$$

dok iz III sledi da je:

$$q_2 = q_1 \tag{67}$$

Na kraju iz jednačine I i IV sledi da je:

$$\begin{aligned} q_3 &= 1-2q_1 \\ q_5 &= 1-q_1 \end{aligned} \tag{68}$$

Sređivanjem jednačine (63), ista biće uprošćena:

$$Q(q) = \left(\frac{T_{13}}{q_1}\right)^{q_1} \cdot \left(\frac{T_4}{q_2}\right)^{q_2} \cdot \left(\frac{T_{4L}}{q_3}\right)^{q_3} \cdot F_a^{\,q_4} \cdot F_b^{\,q_5} \cdot 1^{q_6} \tag{69}$$

zamenom q_2, q_3, q_4, q_5, *i* q_6 prema (65), (66), (67) i (68) jednačina (69) prelazi u:

$$Q(q) = \left(\frac{T_{13}}{q_1}\right)^{q_1} \cdot \left(\frac{T_4}{q_1}\right)^{q_1} \cdot \left(\frac{T_{4L}}{1-2q_1}\right)^{1-2q_1} \cdot F_a^{\,2q_1} \cdot F_b^{\,1-q_1} \tag{70}$$

Očigledno dualna funkcija $Q(q)$ je izražena preko q_1, što je bio i cilj.

Logaritmovanjem funkcije (70) biće:

$$\begin{aligned} \ln Q(q) &= q_1 \ln\left(\frac{T_{13}}{q_1}\right) + q_1 \ln\left(\frac{T_4}{q_1}\right) + (1-2q_1)\ln\left(\frac{T_{4L}}{1-2q_1}\right) + \\ &+ 2q_1 \ln F_a + (1-q_1)\ln F_b \end{aligned} \tag{71}$$

Neka je $\overrightarrow{q_0} = q_{j0}$, $j=\overline{1,6}$, vektor stacionarne tačke u kojoj je $Q(q)_{max}=Q_0$ maksimalno, tada u istoj tački postiže maksimum i funkcija $\ln Q(q)$, prema (71).

Prema tome treba izračunati izvod funkcije $\ln Q(q)$ po promjenljivoj q_1 i izjednačiti ga sa nulom:

$$\frac{d}{dq_1}\left[\ln Q(q)\right] = 0 \tag{72}$$

S obzirom da se radi o složenim funkcijama, radi uprošćenja, prema (71), možemo uvesti smene:

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1(\ln T_{13} - \ln q_1) = q_1 \ln T_{13} - q_1 \ln q_1 \\ Q_2 &= q_1 \cdot \ln\left(\frac{T_4}{q_1}\right) \\ Q_3 &= (1-2q_1)\cdot \ln\left(\frac{T_{4L}}{1-2q_1}\right) = \ln\left(\frac{T_{4L}}{1-2q_1}\right) - 2q_1 \ln\left(\frac{T_{4L}}{1-2q_1}\right) \\ Q_4 &= 2q_1 \ln F_a \\ Q_5 &= (1-q_1)\cdot \ln F_b = \ln F_b - q_1 \ln F_b \end{aligned} \tag{73}$$

Sa ovim smenama, funkcija (71) prelazi u:

$$\ln Q(q) = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 \tag{74}$$

Izvod funkcije (74) biće:

$$\frac{d\left[\ln Q(q)\right]}{dq_1} = Q_1' + Q_2' + Q_3' + Q_4' + Q_5' \tag{75}$$

Izvodi parcijalnih funkcija (75) po q_1 biće prema (73):

$$\begin{aligned} Q_1' &= \ln T_{13} - (\ln q_1 + 1) \\ Q_2' &= \ln\frac{T_4}{q_1} - 1 \\ Q_3' &= \frac{2}{1-2q_1} - 2\cdot\ln T_{4L} + 2\cdot\ln(1-2q_1) - \frac{4\cdot q_1}{1-2q_1} \\ Q_4' &= 2\cdot \ln F_a \\ Q_5' &= -\ln F_b \end{aligned} \tag{76}$$

Zamenom izvoda parcijalnih funkcija (76) u (75) biće nakon sređivanja, prema (72):

$$\begin{aligned} &\frac{2}{1-2q_1} - \frac{4q_1}{1-2q_1} + \ln\left(\frac{T_4}{q_1}\right) + 2\cdot\ln(1-2q_1) + \\ &+ \ln\left(\frac{T_{13}}{q_1}\right) - 2 - 2\ln T_{4L} + \ln\frac{F_a^2}{F_b} = 0 \end{aligned} \tag{77}$$

Jednačina (77) nakon određenih matematičkih operacija, može se prikazati kao:

$$\ln\left(\frac{1-2q_1}{q_1}\right)^2 + \ln\left(\frac{T_{13}\cdot T_{4L}\cdot F_a^2}{T_4^{\,2}\cdot F_b}\right) = 0 \tag{78}$$

Odavde sledi da je:

$$\left(\frac{1-2q_1}{q_1}\right)^2 = \frac{T_{4L}^2 \cdot F_b}{T_{13}\cdot F_a^{\,2}\cdot T_4} \tag{79}$$

odnosno konačno, rešavanjem po $q_1 \equiv q_{10}$:

$$q_{10} = \frac{1}{2 + \dfrac{T_{4L}}{F_a}\cdot\sqrt{\dfrac{F_b}{T_{13}\cdot T_4}}} \tag{80}$$

Uzimanjem u obzir (65), (66), (67), (68) i (80) sledi da je:

$$q_{20} = q_{10}$$

$$q_{30} = 1 - 2 \cdot q_{10} = 1 - \frac{2}{2 + \frac{T_{4L}}{F_a} \cdot \sqrt{\frac{F_b}{T_{13} \cdot T_4}}}$$

$$q_{40} = 2 \cdot q_{10} = \frac{2}{2 + \frac{T_{4L}}{F_a} \cdot \sqrt{\frac{F_b}{T_{13} \cdot T_4}}}$$

$$q_{50} = 1 - q_{10} = 1 - \frac{1}{2 + \frac{T_{4L}}{F_a} \cdot \sqrt{\frac{F_b}{T_{13} \cdot T_4}}}$$

$$q_{60} = 0 \qquad (81)$$

Prema tome, optimalni dualni vektor ima komponente:

$$\vec{q}_0 = (q_{10}; q_{20}; q_{30}; q_{40}; q_{50}; q_{60}) \qquad (82)$$

Unoseći izračunate komponente optimalnog dualnog vektora $\vec{q}_0$ (82) u maksimum odgovarajuće dualne funkcije (25)

$$\begin{aligned} Q(q)_{\max} &= \max Q(q) = Q_0 = \\ &= Q(q_{10}; q_{20}; q_{30}; q_{40}; q_{50}; q_{60}) \end{aligned} \qquad (83)$$

dobija se vrednost minimuma funkcije optimizacije tj.:

$$F_{c0} = \min F_c = \max Q(q) = Q(q_0) = Q_0 \qquad (84)$$

Na osnovu F_{c0}, izračunavaju se iz jednačine (62), prema (37) komponente optimalnog vektora $\vec{x}_0$ iz sistema:

$$\begin{aligned}
&(I) \quad T_{13} \cdot x_{10}^2 \cdot x_{20} = Q_0 \cdot q_{10} \\
&(II) \quad T_4 \cdot x_{20} \cdot x_{30} \cdot x_{40} = Q_0 \cdot q_{20} \\
&(III) \quad T_{4L} \cdot x_{30} \cdot x_{40} = Q_0 \cdot q_{30} \\
&(IV) \quad F_a \cdot x_{10}^{-1} \cdot x_{20}^{-1} = \frac{q_{40}}{a_{40}} = \frac{a_{40}}{a_{40}} = 1 \\
&(V) \quad F_b \cdot x_{30}^{-1} \cdot x_{40}^{-1} = \frac{q_{50}}{a_{50}} = \frac{a_{50}}{a_{50}} = 1 \\
&(VI) \quad x_{10} \cdot x_{40}^{-1} = \frac{q_{60}}{a_{60}} = \frac{a_{60}}{a_{60}} = 1
\end{aligned} \qquad (85)$$

Iz I i IV jednačine sledi da je:

$$x_{10} = \frac{a_0 \cdot q_{10}}{T_{13} \cdot F_a} \qquad (86)$$

Prema jednačini VI sledi da je:

$$x_{40} = x_{10} \qquad (87)$$

Iz jednačine IV biće:

$$x_{20} = \frac{F_a}{x_{10}} \qquad (88)$$

Isto tako, iz jednačine V biće:

$$x_{30} = \frac{F_b}{x_{40}} = \frac{F_b}{x_{10}} \qquad (89)$$

Jednačine sistema (II), (III), (VI), koje pri ovome nisu korišćene, mogu poslužiti za kontrolu dobijenih rezultata s obzirom da sve jednačine sistema moraju biti zadovoljene.

Za posmatrani primer elektrolučnog zavarivanja grede za držač, a koji su izrađeni od ugljeničnog konstrukcionog čelika (0,25% C), izračunate su konstante:

- kapacitet aparata za zavarivanje $Q_z = 0{,}05 \frac{cm^3}{s}$
- cena osnovnog materijala $T_4 = 1{,}6 \frac{din}{cm^3}$
- cena materijala elektrode $T_3 = 6{,}5 \frac{din}{cm^3}$
- troškovi aparata za zavarivanje $T_{11} = 0{,}75 \frac{din}{s}$
- dozvoljeni napon osnovnog materijala na zatezanje $\pm_d = 10000 \frac{N}{cm^2}$
- dozvoljeni napon osnovnog materijala na smicanje $^{2}{}_{d} = 5000 \frac{N}{cm^2}$
- maksimalna sila opterećenja grede $F = 20000\,N$
- slobodna dužina grede $L = 20 cm$
- troškovi pripreme $T_p = 85\ din$

Vrednost konstanti prema (61) biće:

$$T_{13} = \frac{T_{11}}{Q_z} + T_3 = \frac{0{,}75}{0{,}05} + 6{,}5 = 21{,}5 \ \frac{din}{cm^3}$$

$$F_a = \frac{F}{\sqrt{2} \cdot {}^{2}{}_{d}} = \frac{20000}{\sqrt{2} \cdot 5000} = 2{,}828 \ cm^2$$

$$F_b = \frac{F}{\pm_d} = \frac{20000}{10000} = 2 \ cm^2$$

$$T_{4L} = T_4 \cdot L = 1{,}6 \cdot 20 = 32 \ \frac{din}{cm^2}$$

Komponente optimalnog dualnog vektora biće prema (80), odnosno prema (81):

$$q_{10} = \frac{1}{2 + \frac{T_{4L}}{F_a} \cdot \sqrt{\frac{F_b}{T_{13} \cdot T_4}}} = \frac{1}{2 + \frac{32}{2,828} \cdot \sqrt{\frac{2}{21,5 \cdot 1,6}}} = 0,2115$$

$$q_{20} = q_{10} = 0,2115$$

$$q_{30} = 1 - 2 \cdot q_{10} = 1 - 2 \cdot 0,2115 = 0,577$$

$$q_{40} = 2 \cdot q_{10} = 2 \cdot 0,2115 = 0,423$$

$$q_{50} = 1 - q_{10} = 1 - 0,2115 = 0,7885$$

$$q_{60} = 0 \tag{90}$$

Optimalni dualni vektor prema (82) biće:

$$\vec{q}_0 = (q_{10}; q_{20}; q_{30}; q_{40}; q_{50}; q_{60}) = = (0,2115;\ 0,2115;\ 0,577;\ 0,423;\ 0,7885;\ 0) \tag{91}$$

Optimalne vrednosti dualne funkcije Q_0 prema (69) biće:

$$Q(q_0) = \left(\frac{T_{13}}{q_1}\right)^{q_{10}} \cdot \left(\frac{T_4}{q_2}\right)^{q_{20}} \cdot \left(\frac{T_{4L}}{q_3}\right)^{q_{30}} \cdot \cdot F_a^{\,q_{40}} \cdot F_b^{\,q_{50}} \cdot 1^{q_{60}} \tag{92}$$

Zamenom vrednosti (91) u (92) biće konačno:

$$Q(q_0) = \left(\frac{21,5}{0,2115}\right)^{0,2115} \cdot \left(\frac{1,6}{0,2115}\right)^{0,2115} \cdot \left(\frac{32}{0,577}\right)^{0,577} \cdot 2,828^{0,423} \cdot 2^{0,7885}$$

$$Q(q_0) = 110,914 \tag{93}$$

gde je optimalna vrednost dualne funkcije jednaka funkciji optimizacije:

$$F_{c0} = Q_0 = Q(q_0) = 110,914\ din \tag{94}$$

Na osnovu vrednosti (86), (87) iz (88), (89), određuje se traženi optimalni vektor $\vec{x}_0$:

$$x_{10} = \frac{a_0 \cdot q_{10}}{T_{13} \cdot F_a} = \frac{110,914 \cdot 0,2115}{21,5 \cdot 2,828} = 0,386\ cm$$

$$x_{40} = x_{10} = 0,386\ cm$$

$$x_{20} = \frac{F_a}{x_{10}} = \frac{2,828}{0,386} = 7,326 cm$$

$$x_{30} = \frac{F_b}{x_{10}} = \frac{2}{0,386} = 5,181 cm \tag{95}$$

Kontrola dobijenih rezultata može se izvesti prema jednačinama II, III i VI, sistema (85), s obzirom da iste nisu korišćene.

Sada je optimalni primarni vektor potpuno određen:

$$\vec{q}_0 = (x_{10}; x_{20}; x_{30}; x_{40}) = (0,386;\ 7,367;\ 5,181;\ 0,386) \tag{96}$$

Pri optimalnom vektoru (96), postiže se optimum $F_{c0}=minF_c$, prema (62):

$$F_{c0} = T_{13} \cdot x_{10}^{\ 2} \cdot x_{20} + T_4 \cdot x_{20} \cdot \cdot x_{30} \cdot x_{40} + T_{4L} \cdot x_{30} \cdot x_{40} \tag{97}$$

Zamenom (95) u (97) biće:

$$F_c = 21,5 \cdot 0,386^2 \cdot 7,326 + 1,6 \cdot 7,326 \cdot 5,181 \cdot \cdot 0,386 + 32 \cdot 5,181 \cdot 0,386 = 110,906 din \tag{98}$$

što se moglo očekivati, s obzirom na (93).

Pri proračunu, pojavila se minimalna greška iz razloga zaokruživanja brojeva (na četiri decimale).

Iz prethodnog sledi, da su optimalne vrednosti dimenzija posmatranog zavarenog spoja:

$$h_0 = x_{10} = 3,86\ \ mm$$

$$l_0 = x_{20} = 73,26\ \ mm$$

$$t_0 = x_{30} = 51,81\ \ mm$$

$$b_0 = x_{40} = 3,86\ \ mm$$

Lako se može pokazati da su svi granični uslovi (60) u potpunosti ispunjeni.

ZAKLJUČAK

Metoda geometrijskog programiranja prikazana u radu, uglavnom se koristi kod različitih proizvodnih tehnologija. Pokazano je da je metodu pod određenim uslovima moguće koristiti i u oblasti projektovanja konstrukcija. Posebna efikasnost metode postiže se kada se povezuju tehnologija i izdržljivost konstrukcije kao što je kod prikazanih primera.

Mnoge funkcije koje se susreću u praksi, određenim matematičkim transformacijama, moguće je svesti na pozitivne polinome i na njih primeniti prikazani model.

Model dat u radu kroz tok algoritma, može se smatrati opštim i moguće ga je primeniti u mnogim oblastima projektovanja konstrukcija pri čemu se može uzeti u obzir i tehnologija izrade, dok je moguće primeniti različite tehnoekonomske kriterijume pri optimizaciji. Pri ovome od više konstrukciono-tehnoloških rešenja u procesu formiranja optimalnog projekta moguće utvrditi ono najbolje. Funkcije ograničenja mogu biti različite kako po broju tako i po obliku.

Primena geometrijskog programiranja moguća je kod različitih funkcija optimizacije odnosno ograničenja, kako linearnih tako i nelinearnih. Složeni problemi se pri ovome predstavljaju sistemom linearnih jednačina koji se relativno lako rešava, što je prednost u odnosu na druge metode (na primer simpleksni i gradijentni metod).

Rešenje se uvek dobija direktno bez pretraživanja optimizirane oblasti. Posebnu pažnju pri primeni metode geometrijskog programiranja treba obratiti kada funkcija ograničenja sadrži više od jednog člana. Tada odgovarajući član u dualnoj funkciji, takođe sadrže više članova.

Kod mnogih problema, na kraju se uglavnom dobije veći broj jednačina nego što je potrebno. Ovo omogućuje praćenje i kontrolu dobijenih rezultata s obzirom da sve jednačine sistema moraju biti zadovoljene. Isto tako kontrolu je moguće izvršiti i prema jednakosti $minF_c=maxQ$.

Kao i svaka metoda optimizacije tako i metoda geometrijskog programiranja ima svojih nedostataka. Metodu nije moguće primeniti za slučajeve kada funkcije optimizacije i ograničenja nisu pozitivni polinomi (kada se u polinomu pojavi znak minus). Treba naglasiti da su u tehničkoj praksi ovakvi slučajevi uglavnom retki.

Na kraju, naglasimo da prikazana savremena metoda optimizacije, za efikasnu primenu, zahteva multidisciplinarno znanje odnosno potrebno je poznavanje različitih oblasti: tehnologije, projektovanja, konstruisanja, ekonomije, matematičke analize, matematičkog programiranja. Ovo su verovatno glavni razlozi što se u tehničkoj praksi nedovoljno primenjuje, što se ne može opravdati.

LITERATURA

[1] Wilde D. J, *Globally optional design*, John Wiley & Sons, New York, 1988.

[2] Pljaskin I. I, *Optimizacija tehničeskih rešenij v mašinstroenii*, Mašinstroenie, Moskva 1982.

[3] Reklaitis G. V, Ravidran A., *Engeneering optimization, Methods and applications*, John Wiley & Sons, New York, 1993.

[4] Jacobs H. J, Jacob E., *Spanungsoptimierung, Verfahrensgestaltung durch tehnologiesche Optimiering in der Spanunstechnik*, Veb Verlag Technik, Berlin, 1988.

[5] Wagner H. M, *Principles of Operations Research*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York, 1989.

[6] Petrić J, Zlobec S., *Nelinearno programiranje*, Naučna knjiga, Beograd, 1983.

[7] Duttin R. J, Peterson E. L, *Geometricprogramming-Theory and application*, John Wiley & Sons, New York, 1987.

[8] Kuznecov J. N, *Matematičeskoe programirovanije*, Visšaja škola, Moskva, 1990.

[9] Gabasov R, Kirilov F. M., *Metodi optimizacije*, BGU, Minsk, 1991.

[10] Akulič I. L, *Matimatičsekoe programirovanije v primerah i zadačah*, Visšaja škola, Moskva, 1996.

[11] Petrić J, Šarenac L, *Operaciona istraživanja I i II, Zbirka rešenih zadataka*, Naučna knjiga, Beograd, 1984.

[12] Petrić J, *Operaciona istraživanja I i II*, Savremena administracija, Beograd, 1993.

[13] Cirlin A. M, *Optimalnoe upravlenie tehnologičestimi processami*, Energoatomizdat, Moskva, 1996.

[14] Novak F. S, Arsov J. B, *Optimizacija processov tehnologii metallov*, Mašinostroenie-Tehnika, Moskva-Sofija, 1980.

[15] Ham I, Faria-Gonzales R., *Production Optimization Method by using a Digital Computer*, Advances in Machine Tool Design and Research, Oxford, 1971.

[16] Berberović S, Stavrić B, *Teorija i metodologija troškova*, Savremena administracija, Beograd, 1998.

[17] Kolarić V, *Teorija dinamike troškova*, Rad, Beograd, 1985.

[18] Zelenović D, *Proizvodni sistemi*, Naučna knjiga, Beograd, 1983.

[19] Majcen Ž, *Troškovi u teoriji i praksi*, Informator, Zagreb, 1988.

[20] Draženović B, Humo E, *Problemi upravljanjem složenim sistemima*, Zagreb, 1982.

[21] Speedy C. B, Brown R. F, *Identification and optimal Control*, Oliver and Boyd, Edinburg, 1980.

[22] Leckij E. K, *Planirovanie eksperimenta vissledovanii tehnolodičeskih processoi*, Mir, Moskva, 1997.

[23] Stanić J, *Uvod u teoriju tehnoekonomske optimizacije*, Mašinski fakultet, Beograd, 1998.

[24] Stanić J, *Elementi teorije tehnoekonomske optimizacije obradivih procesa*, Institut za alatne mašine i alate, Beograd, 1984.

[25] Opitz H, *Moderne produktiontechnik, Stand und tendenzen*, 3. Auflage, Verlag W. Girardek, Essen, 1980.

[26]Zohadi M. E, *Statistical Analysis, estimation and optimization of surface finish in the grinding process, Development of Production System*, Taylor-Francis LTD, London, 1994.

[27]Wilson F, *Tool Engineers Handbook*, 2^{nd} edition, Mc Grow-Hill Book Co, Inc. New York, London, 1979.

[28]Mitriković D. S, Mihailović D, *Linearna algebra*, Građevinska knjiga, 1998.

[29]Kurepa S, *Matematička analiza I i II*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

[30]Milosavljević M, Radojković M., *Čelične konstrukcije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1995.

[31]Jovanović C, *Zavarene konstrukcije*, Građevinske konstrukcije, Građevinska knjiga, Beograd, 1987.

[32]Green R, *Weld Design*, Prentice-Hall, New York, 1985.

[33]Hase C, Reitze W, *Lehrbuch des Lichtbogenschweissens*, W.Girardet, Essen, 1992

SUMMARY

ON SOME OTHER PREFERRED METHOD FOR OPTIMIZING THE WELDED JOINT

The paper shows an example of performed optimization of sizes in terms of welding costs in a characteristic loaded welded joint. Hence, in the first stage, the variables and constant parameters are defined, and mathematical shape of the optimization function is determined. The following stage of the procedure defines and places the most important constraint functions that limit the design of structures, that the technologist and the designer should take into account. Subsequently, a mathematical optimization model of the problem is derived, that is efficiently solved by a proposed method of geometric programming.

Further, a mathematically based thorough optimization algorithm is developed of the proposed method, with a main set of equations defining the problem that are valid under certain conditions. Thus, the primary task of optimization is reduced to the dual task through a corresponding function, which is easier to solve than the primary task of the optimized objective function. The main reason for this is a derived set of linear equations. Apparently, a correlation is used between the optimal primary vector that minimizes the objective function and the dual vector that maximizes the dual function.

The method is illustrated on a computational practical example with a different number of constraint functions. It is shown that for the case of a lower level of complexity, a solution is reached through an appropriate maximization of the dual function by mathematical analysis and differential calculus.

Key words: *loaded welded structures, mathematical model of optimization, the cost function, constraint function, geometric programming, positive polynomials, dual function*